Cette condition n'est pas vérifiée puisque X^M est de l'ordre de 2. Néanmoins, le modèle gaussien permet de recouvrer les résultats du gaz de Bose libre.

La possibilité d'appliquer la théorie de Wilson à un système de Bose en interaction est à l'étude.

Références

[1] K. G. Wilson et J. Kogut, *The Renormalization Group and the ε Expansion* (Princeton Univ. Lecture Notes, 1972).

[2] F. London, *Superfluids*, Vol. II (Dover, NewYork 1961).

Développement en cumulants de la fonction de partition d'un système de bose

par S. P. Ohanessian et A. Quattropani

(Lab. de Physique Théorique, EPF-Lausanne)

Pour un système de bosons en interaction, nous présentons le calcul de la grande fonction de partition dans la représentation des états cohérents. Dans le cas d'un potentiel d'interaction conservant l'énergie cinétique, nous obtenons à l'aide de la théorie des cumulants, un développement en puissance de l'activité. A la limite classique cette expression tend vers le développement de Mayer.

Relations de scaling pour un ferromagnéto-électrique linéaire

par E. Ascher et P. B. Scheurer

(Battelle, Advanced Studies Center, 7 route de Drize, 1227 Carouge-Genève)

Les relations dont il s'agit dans cette communication sont celles de Rushbrooke. Celles de Coopersmith peuvent être traitées exactement de la même manière, mais nous ne le ferons pas ici.

Rappelons d'abord que les inégalités de Rushbrooke et de Coopersmith expriment tout simplement des conditions nécessaires pour la stabilité du système: on considère la densité d'enthalpie libre g et l'on exprime que le hessien de g (par rapport aux variables considérées) est négatif semidéfini.

Dans le cas qui nous occupe ici, g est fonction des champs électrique E et magnétique H et de la température T. Le hessien s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial E^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial E \partial H} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial E \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial H \partial E} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial H^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial H \partial T} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial T \partial E} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial T \partial H} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial T^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa_{TH} & -\alpha_T & -\pi^P_{EH} \\ -\tilde{\alpha}_T & -\chi_{TE} & -\pi^M_{EH} \\ -\tilde{\pi}^P_{EH} & -\tilde{\pi}^M_{EH} & -\dfrac{c_{EH}}{T} \end{pmatrix}$$

Les indices inférieurs indiquent ici les grandeurs maintenues constantes, κ et χ sont les susceptibilités électrique et magnétique, c la chaleur spécifique, α le coefficient magnéto-électrique, π^P le coefficient pyro-électrique et π^M le coefficient pyromagnétique. Il s'agit d'une matrice 7×7 et le tilde indique le transposé. Pour simplifier l'écriture, nous abandonnons l'écriture tensorielle: les coefficients sont des scalaires. Cela veut dire soit que le milieu est isotrope, soit que nous considérons deux directions bien choisies d'un milieu anisotrope, par exemple la direction de l'aimantation spontanée et celle de la polarisation spontanée dans la phase orthorhombique de la boracite de nickel et d'iode, $Ni_3B_7O_{13}I$. En effet, cette substance a une température critique, à 60°K environ, en-dessous de laquelle elle est à la fois ferroélectrique et ferromagnétique.

Les conditions nécessaires de la stabilité de cette phase s'expriment par les relations suivantes$_x$

$$-\kappa_{TH} \leqslant 0$$

$$-\chi_{TE} \leqslant 0$$

$$-\frac{c_{EH}}{T} \leqslant 0$$

$$\kappa_{TH}\,\chi_{TE} - \alpha_T^2 \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\kappa_{TH}\frac{c_{EH}}{T} - (\pi_{EH}^P)^2 \geqslant 0 \tag{2}$$

$$\chi_{TE}\frac{c_{EH}}{T} - (\pi_{EH}^M)^2 \geqslant 0 \tag{3}$$

$$-\kappa_{TH}\chi_{TE}\frac{c_{EH}}{T} + \kappa_{TH}(\pi_{EH}^M)^2 + \chi_{TE}(\pi_{EH}^P)^2 + \frac{c_{EH}}{T}\alpha_T^2 - 2\alpha_T\,\pi_{EH}^P\,\pi_{EH}^M \leqslant 0.$$

Les trois inégalités (1), (2) et (3) donnent lieu aux inégalités de Rushbrooke et de Coopersmith.

Pour le montrer dans le cas de celles de Rushbrooke, nous introduisons les exposants critiques suivants

$$\kappa_{TH} \sim (-\epsilon)^{-\gamma'_P} \qquad \chi_{TE} \sim (-\epsilon)^{-\gamma'_M} \qquad \alpha_T \sim (-\epsilon)^{-\gamma'_{PM}}$$

$$\pi_{EH}^P \sim (-\epsilon)^{\beta_P - 1} \qquad \pi_{EH}^M \sim (-\epsilon)^{\beta_M - 1} \qquad \frac{c_{EH}}{T} \sim (-\epsilon)^{-\alpha'}$$

$$P_0 \sim (-\epsilon)^{\beta_P} \qquad M_0 \sim (-\epsilon)^{\beta_M} \qquad c_{TH} \sim (-\epsilon)^{-\alpha'}$$

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c} \qquad f \sim (-\epsilon)^{2-\alpha'}$$

Il vient alors

$$(-\epsilon)^{-\gamma'_P - \gamma'_M} \geqslant (-\epsilon)^{2\gamma'_{PM}}$$

$$\gamma'_P + \gamma'_M \geqslant 2\gamma'_{PM} \tag{1'}$$

$$(-\epsilon)^{-\gamma'_P - \alpha'} \geqslant (-\epsilon)^{2(\beta_P - 1)}$$

$$\alpha' + \gamma'_P + 2\beta_P \geqslant 2 \tag{2'}$$

$$(-\epsilon)^{-\gamma'_M-\alpha'} \geqslant (-\epsilon)^{2(\beta_M-1)}$$

$$\alpha' + \gamma'_M + 2\beta'_M \geqslant 2. \qquad (3')$$

La relation (1') est nouvelle, (2') et (3') sont les inégalités de Rushbrooke habituelles.

Ouvrons ici une parenthèse pour souligner combien il est important de préciser toujours les grandeurs que l'on fixe. Ainsi la susceptibilité électrique isotherme à aimantation constante diffère de celle à champ magnétique constant de la manière suivante:

$$\kappa_{TM} = \kappa_{TH} - \frac{\alpha_T^2}{\chi_{TE}}.$$

On voit qu'elles coïncident seulement en l'absence de l'effet magnéto-électrique. D'une façon similaire, on a:

$$\chi_{TP} = \chi_{TE} - \frac{\alpha_T^2}{\kappa_{TH}}.$$

On obtient ces relations et beaucoup d'autres le plus simplement du monde en prenant les hessiens dérivés de l'enthalpie libre et de l'énergie respectivement et en les diagonalisant de toutes les manières possibles d'après la méthode de Jacobi. Cela introduit – comme l'a montré Tisza – les transformées de Legendre de ces deux potentiels thermodynamiques. On obtient ainsi, par exemple, aussi les inégalités suivantes

$$\kappa_{HT} \geqslant \kappa_{Hs} \geqslant \kappa_{Ms} \geqslant 0$$

$$\kappa_{HT} \geqslant \kappa_{MT} \geqslant \kappa_{Ms} \geqslant 0$$

$$\chi_{ET} \geqslant \chi_{Es} \geqslant \chi_{Ps} \geqslant 0$$

$$\chi_{ET} \geqslant \chi_{PT} \geqslant \chi_{Ps} \geqslant 0$$

$$c_{EH} \geqslant c_{EM} \geqslant c_{PM} \geqslant 0$$

$$c_{EH} \geqslant c_{PH} \geqslant c_{PM} \geqslant 0$$

Passons maintenant aux ferromagnéto-électriques linéaires. Ce sont des substances caractérisées par les équations constitutives suivantes:

$$P = P_0 + \epsilon_0 \kappa E + \frac{1}{c}\alpha H$$

$$M = M_0 + \frac{1}{c}\alpha E + \mu_0 \chi H$$

c'est-à-dire que ces corps sont à la fois ferro-électriques ($P_0 \neq 0$) et ferromagnétiques ($M_0 \neq 0$) et alors forcément magnéto-électriques ($\alpha \neq 0$). Ces équations constitutives peuvent être considérées comme équations d'état dérivées de la densité d'enthalpie libre suivante:

$$-g(E, H, T) = P_0(T)E + M_0(T)H + \frac{\epsilon_0}{2}\kappa(T)E^2 + \frac{1}{c}\alpha(T)EH + \frac{\mu_0}{2}\chi(T)H^2.$$

Il est important de se rendre compte que cette expression est valable pour un monodomaine ferromagnéto-électrique; c'est pourquoi les termes linéaires apparaissent. Nous allons déterminer la densité d'énergie libre

$$f(P, M, T) = g - \frac{\partial g}{\partial E} E - \frac{\partial g}{\partial H} H.$$

On trouve

$$f = \frac{\mu_0}{2} \frac{\chi}{\delta} (P - P_0)^2 - \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\delta} (P - P_0)\,(M - M_0) + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\kappa}{\delta} (M - M_0)^2$$

avec

$$\delta = \frac{1}{c^2} (\kappa \chi - \alpha^2)$$

ou encore

$$f(P, M, T) = f_0(T) + f_1(P, M, T)$$

avec

$$f_0(T) = \frac{\mu_0}{2} \frac{\chi}{\delta} P_0^2 - \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\delta} P_0 M_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\kappa}{\delta} M_0^2.$$

C'est le terme $f_0(T)$ qui nous intéresse, car il est le seul à être différent de zéro à champs extérieurs nuls.

L'hypothèse de scaling est une sorte d'hypothèse d'homogénéité forte. On sait que les potentiels thermodynamiques sont homogènes (de premier degré) dans les variables extensives. En d'autres mots, chaque terme d'un potentiel thermodynamique dépend de la même manière du volume du système. L'hypothèse de scaling revient à demander, par exemple dans le cas considéré par Rushbrooke, qu'au voisinage d'un point critique et à champs extérieurs nuls, chaque terme dépende de la même manière de la différence de température T-T_c. C'est un des buts de notre travail en cours que de montrer d'une façon approfondie la relation entre homogénéité et scaling. Aujourd'hui nous voulons seulement illustrer cette idée. Considérons en effet le terme $f_0(T)$. Après avoir tenu compte de la variation de δ en fonction de ϵ, nous obtenons les égalités suivantes entre les exposants critiques

$$\delta \sim (-\epsilon)^{-\gamma'_P - \gamma'_M} = (-\epsilon)^{2\gamma_{PM}}$$

$$2 - \alpha' = \gamma'_P + 2\beta_P = \gamma'_{PM} + \beta_P + \beta_M = \gamma'_M + 2\beta_M$$

ce qui nous donne les égalités correspondant aux inégalités (1'), (2') et (3'), obtenues précédemment, et une quatrième égalité, leur conséquence, qu'il vaut peut-être la peine de mettre en évidence:

$$\gamma'_P - \gamma'_M = 2(\beta_M - \beta_P). \tag{4}$$